東京大学 ２０２０年 入学試験 理系第２問 解答（座標）

解答

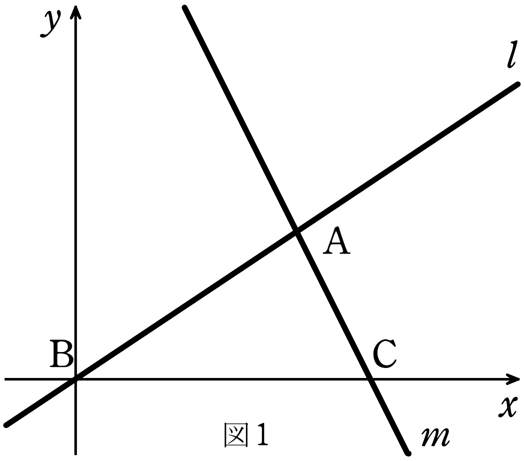


図１

左図（図１）のように，点 B を原点，点 C を x 座標が正である x 軸上の点とすると，点 B の座標は $(0, 0)$，点 C の座標は $(c, 0)$ $(c>0)$ とできる．また，点 A の座標を (a_1, a_2) $(a_1, a_2>0)$ としても一般性を失わない．さらに，条件から $\triangle ABC=1$ であるから，

$$\frac{1}{2}a_2c=1 \quad \therefore c=\frac{2}{a_2}$$

また，直線 AB と直線 CA をそれぞれ l , m とすると，その方程式は,

$$l : a_2x-a_1y=0$$

$$m : {a_2}^2x-(a_1a_2-2)y-2a_2=0$$

と表せる．ここで， $f(x, y)=a_2x-a_2y$, $g(x, y)={a_2}^2x-(a_1a_2-2)y-2a_2$ とし，点 X の座標を (x_1, x_2) とすると，点 X と直線 AB , BC , CA との距離はそれぞれ d_1 , d_2 , d_3 を用いて，

$$d_1=\frac{|f(x_1, x_2)|}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}$$

$$d_2=|x_2|$$

$$d_3=\frac{|g(x_1, x_2)|}{\sqrt{({a_2}^2)^2+(a_1a_2-2)^2}}$$

となる．よって， $\triangle ABX$, $\triangle BCX$, $\triangle CAX$ の面積は

$$\triangle ABX=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d_1=\frac{1}{2}\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\,\frac{|f(x_1, x_2)|}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}=\frac{1}{2}|f(x_1, x_2)|$$

$$\triangle BCX=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d_2=\frac{1}{2}c|x_2|=\frac{|x_2|}{a_2}$$

$$\triangle CAX=\frac{1}{2}\cdot CA\cdot d_3=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1-\frac{2}{a_2}\right)^2+{a_2}^2}\,\frac{|g(x_1, x_2)|}{\sqrt{({a_2}^2)^2+(a_1a_2-2)^2}}=\frac{1}{2a_2}|g(x_1, x_2)|$$

であり， $S=\triangle ABX+\triangle BCX+\triangle CAX$ とすると，

$$S=\frac{1}{2a_2}(a_2|f(x_1, x_2)|+2|x_2|+|g(x_1, x_2)|)$$

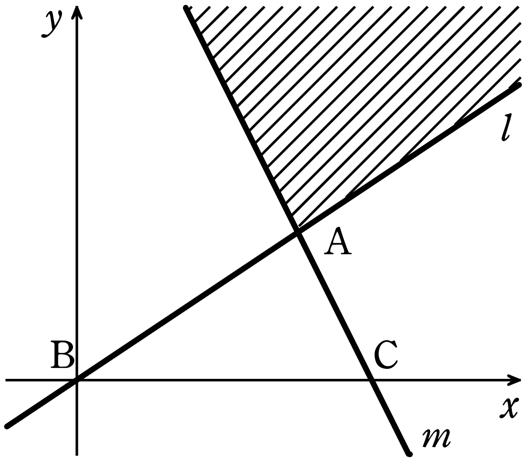
（Ｉ） $f(x_1, x_2)\geqq 0$, $g(x_1, x_2)\leqq 0$, $x_2\geqq 0$ のとき，つまり $\triangle ABC$ の内部と周上に点 X があるとき

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2a_2}(a_2f(x_1, x_2)+2x_2-g(x_1, x_2))\\&=\frac{1}{2a_2}({a_2}^2x_1-a_1a_2x_2+2x_2-{a_2}^2x_1+(a_1a_2-2)x_2+2a_2)\\&=\frac{1}{2a_2}\cdot 2a_2=1\end{aligned}$$

よって，条件 $2\leqq S\leqq 3$ を満たさない.

（Ⅱ） $f(x_1, x_2) \leqq 0$, $g(x_1, x_2) \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ のとき，つまり右図（図２）の斜線部のとき

図２



$$S = \frac{1}{2a_2}(-a_2 f(x_1, x_2) + 2x_2 + g(x_1, x_2))$$

$$= \frac{1}{2a_2}(-a_2{}^2 x_1 + a_1 a_2 x_2 + 2x_2 + a_2{}^2 x_1 - (a_1 a_2 - 2)x_2 - 2a_2)$$

$$= \frac{1}{2a_2}(4x_2 - 2a_2) = \frac{2x_2}{a_2} - 1$$

条件から，

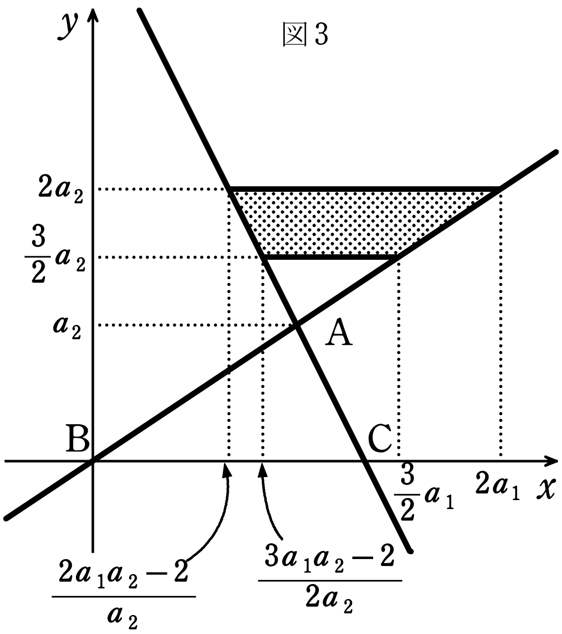
$$2 \leqq S \leqq 3$$

$$2 \leqq \frac{2x_2}{a_2} - 1 \leqq 3$$

$$\frac{3}{2}a_2 \leqq x_2 \leqq 2a_2$$

したがって，点 X の動き得る領域は，下図（図３）の網掛け部である．この網掛け部（台形）の面積は，

図３



（大きい三角形 ― 小さい三角形）

$$\frac{1}{2}\left(2a_1 - \frac{2a_1a_2-2}{a_2}\right)(2a_2 - a_2)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}a_1 - \frac{3a_1a_2-2}{2a_2}\right)\left(\frac{3}{2}a_2 - a_2\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a_2} \cdot a_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

点 A, B, C は対称であるから，

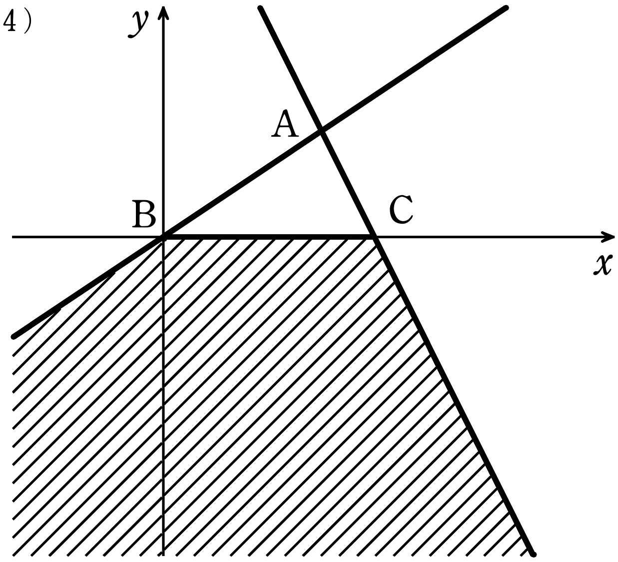
$$f(x_1, x_2) \leqq 0,\ g(x_1, x_2) \leqq 0,\ x_2 \leqq 0$$

$$f(x_1, x_2) \geqq 0,\ g(x_1, x_2) \geqq 0,\ x_2 \leqq 0$$

のときも同様に $\frac{3}{4}$ となる．

（Ⅲ） $f(x_1, x_2) \geqq 0$, $g(x_1, x_2) \leqq 0$, $x_2 \leqq 0$のとき，つまり右図（図４）の斜線部のとき

図４



$$S = \frac{1}{2a_2}(a_2 f(x_1, x_2) - 2x_2 - g(x_1, x_2))$$

$$= \frac{1}{2a_2}(a_2{}^2 x_1 - a_1 a_2 x_2 - 2x_2 - a_2{}^2 x_1 + (a_1 a_2 - 2)x_2 + 2a_2)$$

$$= \frac{1}{2a_2}(2a_2 - 4x_2) = 1 - \frac{2x_2}{a_2}$$

条件から，

$$2 \leqq S \leqq 3$$

$$2 \leqq 1 - \frac{2x_2}{a_2} \leqq 3$$

$$-a_2 \leqq x_2 \leqq -\frac{1}{2}a_2$$

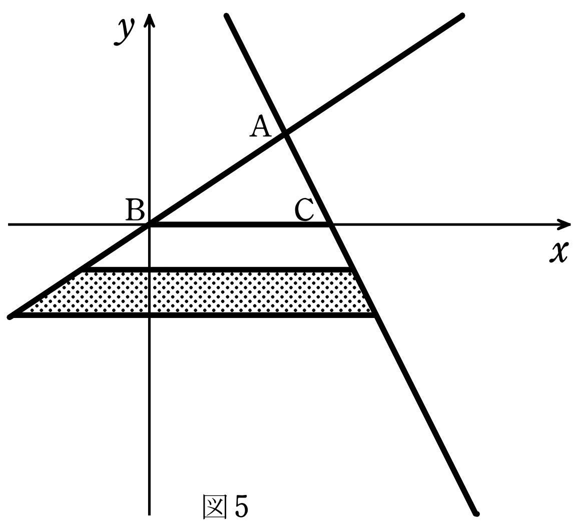


図５

したがって，点 X が動き得る範囲は左図（図５）の網掛け部（台形）となるから，その面積は

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{4}{a_2}-a_1\right)-(-a_1)\right\}\{a_2-(-a_2)\}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3}{a_2}-\frac{a_1}{2}\right)-\left(-\frac{a_1}{2}\right)\right\}\left\{a_2-\left(-\frac{a_2}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{a_2}\cdot 2a_2-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{a_2}\cdot\frac{3}{2}a_2=4-\frac{9}{4}=\frac{7}{4}$$

点 A, B, C は対称であるから

$$f(x_1\,,\,x_2)\geqq 0\,,\ g(x_1\,,\,x_2)\geqq 0\,,\ x_2\geqq 0$$

$$f(x_1\,,\,x_2)\leqq 0\,,\ g(x_1\,,\,x_2)\leqq 0\,,\ x_2\geqq 0$$

のときも同様に $\frac{7}{4}$ となる.

以上（Ⅰ）～（Ⅲ）より，求める面積は　$3\cdot\frac{3}{4}+3\cdot\frac{7}{4}=\frac{15}{2}$

（解答終わり）

中学校数学での解法とは逆に，点と直線の距離や２点間の距離を用いて面積を出し，絶対値があるから場合分けをするというように，ごく当たり前の操作･計算をしていくだけで解答が完成します．このように，より高度な数学を学ぶ高校数学は，中学校数学に比べ，応用範囲（対応できる問題の範囲）が広くなります．つまり，問題を解いた分だけ力がつきます．もっと平たく言えば，高校数学は努力を裏切らないということです.

そうは言っても，今回の座標を用いた解答は，長いしゴリ押しじゃん！という声が聞こえてきそうですから，次のベクトルでの解法は期待していてください！と言い訳をしておきます.